PART4 数学的帰納法

要点① 数学的帰納法

$a_n=5^n-2^n$ で表される数列について

$$a_1=3,\ a_2=21,\ a_3=117,\ a_4=609$$

である。$21=3\cdot7$，$117=3\cdot39$，$609=3\cdot203$ より，数列 $\{a_n\}$ の初項から第4項までは3の倍数であることがわかる。では，数列 $\{a_n\}$ の項はすべて3の倍数だろうか。

ある命題が，すべての自然数 n について成り立つことを，無数にある自然数1つ1つについて確かめることは不可能である。

数列 $\{a_n\}$ において，$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+3$ のように，初項と，前の項から次の項をただ1通りに定める関係式(漸化式)が与えられれば，この数列のすべての項を順に定義することができる。これと同様に，自然数 n に関する命題 P が，すべての自然数 n について順に成り立つことは，次のように確かめることができる。

> [1] $n=1$ のとき，命題 P が成り立つことを示す。
>
> [2] $n=k$ のとき，命題 P が成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のときにも命題 P が成り立つことを示す。

[1]と[2]が示されることにより，$n=1$ のとき命題 P が成り立つことから，$n=2$ のときにも命題 P が成り立ち，$n=2$ のとき命題 P が成り立つことから，$n=3$ のときにも命題 P が成り立つ。以下同様にして，$n=4$，5，6，……のときにも命題 P が成り立ち，結果，すべての自然数 n について命題 P が成り立つ。

このような証明法を「　　　　　　」という。

例 $1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$　……　①が成り立つことを，数学的帰納法で証明する。

[1] $n=$　のとき　　①の左辺$=1$，①の右辺$=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot2=1$

よって，$n=1$ のとき，①は成り立つ。

[2] $n=$　のとき，①が成り立つと仮定すると

$$1+2+3+\cdots\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$$

$n=k+1$ のとき

①の左辺$=1+2+3+\cdots\cdots+\ \ +$

$$= \qquad\qquad +(k+1)$$

$$=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

$$=\frac{1}{2}(k+1)\{(k+1)+1\}$$

となり，$n=k+1$ のときの①の右辺と一致する。

よって，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1]，[2] より，すべての自然数 n について，①が成り立つ。

4 数学的帰納法により，次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

Point Pickup

数学的帰納法による証明

自然数 n に関する命題 P が，すべての自然数 n について成り立つことを証明するには，次の[1]，[2]を証明すればよい。

[1] $n=1$ のとき命題 P が成り立つ。

[2] $n=k$ のとき命題 P が成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のときにも命題 P が成り立つ。

第 5 講　PART4 確認問題

1　すべての自然数 n において，

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2 \quad \cdots\cdots(A)$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明する。

（証明）

[1]　$n=$ ア のとき，

(A)の（左辺）＝ イ，(A)の（右辺）＝ ウ

より，(A)は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，(A)が成り立つと仮定すると，

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)=k^2$$

$n=k+1$ のとき，(A)より，

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)+\{2(\boxed{\text{エ}})-1\}$$

$$=1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)+(2k+1)$$

$$=\boxed{\text{オ}}+(2k+1)$$

$$=(\boxed{\text{カ}})^2$$

よって，$n=k+1$ のときも(A)は成り立つ。

[1]，[2] より，(A)はすべての自然数 n で成り立つ。

（証明終わり）

ア ～ カ は，次の①～⑥のうちから選べ。

① 1　② 2　③ k

④ k^2　⑤ $k-1$　⑥ $k+1$

PART4 数学的帰納法

4 数学的帰納法により，次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

[解答]

$1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)=\dfrac{1}{2}n(3n-1)$ …… ① とする。

[1] $n=1$ のとき　①の左辺$=1$，①の右辺$=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot(3\cdot1-1)=1$

よって，$n=1$ のとき，①は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$1+4+7+\cdots\cdots+(3k-2)=\frac{1}{2}k(3k-1)$$

$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}①の左辺&=1+4+7+\cdots\cdots+(3k-2)+\{3(k+1)-2\}\\&=1+4+7+\cdots\cdots+(3k-2)+(3k+1)\\&=\frac{1}{2}k(3k-1)+(3k+1)\\&=\frac{1}{2}\{k(3k-1)+2(3k+1)\}\\&=\frac{1}{2}(3k^2+5k+2)\\&=\frac{1}{2}(3k+2)(k+1)\\&=\frac{1}{2}(k+1)\{3(k+1)-1\}\end{aligned}$$

となり，$n=k+1$ のときの①の右辺と一致する。

よって，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1]，[2] より，すべての自然数 n について，①が成り立つ。

第 5 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：①，イ：①，ウ：①，エ：⑥，オ：④，カ：⑥

[解説]

(証明)

$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$　……(A)

[1]　$n=\mathbf{1}$ のとき，[A]

(A)の(左辺)$=\mathbf{1}$，(A)の(右辺)$=\mathbf{1}$

より，(A)は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，(A)が成り立つと仮定すると，

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)=k^2$$

$n=k+1$ のとき，(A)より，

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)+\{2(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})-1\}$$
$$=1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)+(2k+1)$$
$$=\boldsymbol{k}^2+(2k+1)$$ [B]
$$=(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})^2$$

よって，$n=k+1$ のときも(A)は成り立つ。

[1]，[2] より，(A)はすべての自然数 n で成り立つ。

(証明終わり)

[A]　ある命題が，すべての自然数 n について成り立つことを証明するには，次の2つのことを示す。
[1]　$n=1$ のとき成り立つ。
[2]　$n=k$ のとき成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のときにも成り立つ。

[B]　$1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)$ を k^2 に書き換える。